BAB III PENENTUAN LUAS

3.1. PENENTUAN LUAS PROFIL MELINTANG

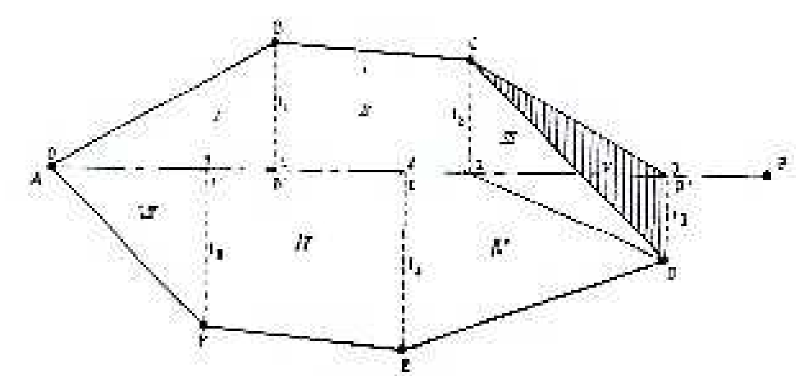
Bila suatu daerah yang dibatasi oleh garis-garis lurus *tertutup* diukur dengan salah satu cara pengukuran yang telah dibicarakan pada bab-bab yang lalu, maka dapatlah ditentukan luas darah itu pula. Penentuan luas tergantung pada cara pengukuran daerah itu dan pada ketelitian yang dikehendaki.

Cara-cara penentuan luas adalah:

a. penentuan luas dengan menggunakan angka-angka yang menyatakan jarak;
b. penentuan luas dengan cara setengah grafis;
c. penentuan luas dengan cara grafis;
d. penentuan luas dengan cara mekanis-grafis,

3.2. PENENTUAN LUAS DENGAN MENGGUNAKAN ANGKA-ANGKA YANG MENYATAKAN JARAK

Bila pengukuran daerah dilakukan dengan maksud untuk menentukan luas, maka daerah itu akan dibagi dalam segitiga-segitiga dan trapesia, bentuk-bentuk mana dapat dengan mudah dicari luasnya.



Gambar 3

Pada cara pertama, pengukuran dilakukan dengan mengukur unsure-unsur segitiga dan trapesia yang perlu untuk dapat menghitung bentuk-bentuk itu. Bentuk-bentuk segitiga dan trapesia didapat dengan membuat suatu garis ukur. Garis ukur ini harus dipilih sedemikain rupa, hingga jarak-jarak dari titik-titik batas ke garis ukur ini kecil, supaya dapat mudah diukur. Untuk mencapai, sebagai garis ukur diambil garis lurus yang memotong dengan memanjang daerah yang akan ditentukan luasnya.

Sebagai contoh: harus ditentukan luas daerah yang dibatasi oleh ABCD EF.A. Maka dibuatlah garis ukur AP. Semua titik batas diproyeksikan pada garis ukur ini. Sekarang yang diukut semua jarak titik-titik batas ke garis ukur AP: t_1, t_2, t_3, t_4 dan t_s dan jarak titik proyeksi titik-titik batas yang letak pada garis ukur, dihitung dari titik A, jadi AB' = 01, AC' = 02, AD' = 03, AE' = 04, AF' = 05.

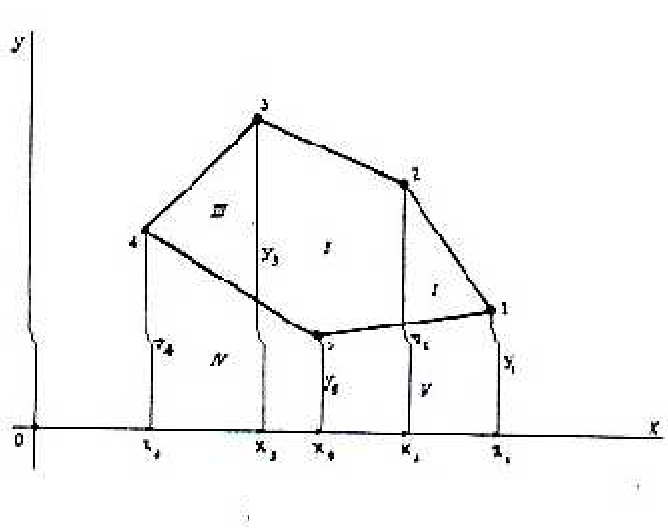
Untuk menghindarkan koefisien 1/2, maka dicari dua kali luas.

2 luas ABCDEF, A = luas Δ I + luas trap III + Δ III + luas trap IV - Δ V + luas trap VI + Δ VII

$= t_1.01 + (t_1 + t_2)\ 12 + t_2.23 + (t_3 + t_4)\ 34 – t_3.23 + (t_4 + t_5)\ 45 + t_3.05.$

Setelah disusun, suku ketiga dan suku kelima dijadikan satu, didapat 2 luas = $t_1.01 + (t_1 + t_2)\ 12 + (t_2 + t_3)\ 23 + (t_3 + t_4)\ 34 – (t_4 + t_5)\ 45 + t_s.05$.

Rumus ini adalah tersusun, bila diingat bahwa untuk suku pertama dan suku terakhir adalah $t_0 = 0$ dan $t_6 = t_0 – 0$, hingga untuk kedua suku dapat ditulis seperti suku-suku lainnya $(t_0 + t_1)\ 01$ dan $t_s.\ 05 = (t_s + t_6)\ 56$.



Gambar 4

Pada suku ketiga hanya didapat selisih dua garis tinggi (t_2 – t_3) dan bukan jumlah (t_2 + t_3), hal mana disebabkan oleh karena garis ukur AP memotong salah satu sisi batas daerah. Maka ingatlah: bila garis ukur memotong salah satu sisi batas daerah, selalu harus diambil untuk factor dengan tinggi selsih antara tinggi yang letak di muka dan tinggi yang letak di belakang titik potong garis ukur dengan sisi batas daerah, jadi bukan jumlah kedua garis tinggi itu.

Cara kedua, untuk menghitung luas dengan angka-angka adalah dengan menggunakan koordinat-koordinat titik-titik batas daerah. Koordinat-koordinat titik batas ditentukan misalnya dengan mengukur batas daerah itu sebagai poligoon yang diukur oleh theodolit dengan menggunakan suatu titik yang tentu terhadap suatu salib sumbu YOX yang tentu pula.

Misalkan garis batas daerah 1-2-3-4-5-1 telah diukur dengan theodolit sebagai poligoon dan titik-titik batas diketahui koordinat-koordinatnya: 1 (x_1, y_1); 2 (x_2, y_2); 3 (x_3, y_3); 4 (x_4, y_4) dan 5 (x_5, y_5).

Proyeksikanlah titik-titik batas pada sumbu X, maka absis x_1, x_2, x_3, x_4 dan x_5, semuanya dihitung dari titik asal 0.

2 luas 12345.1 = luas trap I + luas trap II + luas trap III – luas trap IV – luas trap V.

$$= (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) - (x_5 - x_4)(y_4 + y_5) - (x_1 - x_5)(y_5 - y_1).$$

Supaya ruas kanan merupakan suatu jumlah, maka suku keempat dan suku kelima yang mempunyai tanda minus diganti dengan suku-suku yang mempunyai tanda plus: $-(x_5 - x_4)(y_4 + y_2) = (x_4 - x_5)(y_4 + y_5)$ dan $-(x_1 - x_5)(y_5 + x_1) = -(x_5 - x_1)(y_5 + y_1)$ sehingga rumus menjadi:

$$2 \text{ Luas } 12345.1 = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_5)(y_4 + y_5) + (x_5 - x_1)(y_5 + y_1) \qquad \text{(1a)}$$

Supaya suku akhir tidak dilupakan, maka perlulah ditulis untuk daerah 12345.1 dengan angka 1 ditulis lagi di belakang, supaya daerah tertutup, sehingga mempunyai luas.

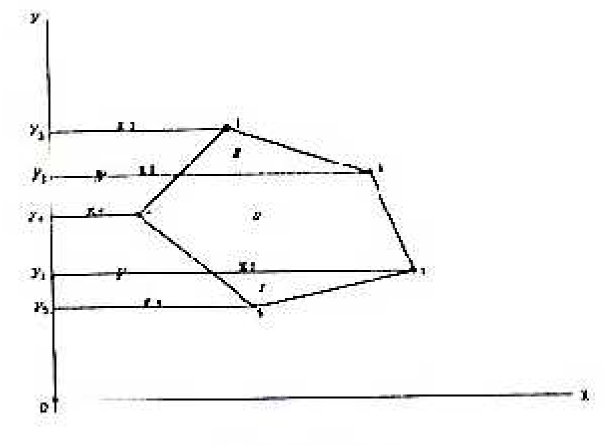
Rumus di atas tulis dengan bentuk umum:

$2L = \Sigma\ (x_n - x_{n+1})\ (y_n + y_{n+1})$…………………………………………………….(1)

Proyeksikanlah sekarang daerah pada sumbu Y, maka didapat:

2 luas 12345.1 = luas trap I + luas trap II + luas trap III – luas trap IV – luas trap V.

$= (x_5 + x_1)\ (y_1 - y_5) + (x_1 + x_2)\ (y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)\ (y_3 - y_2) - (x_3 + x_4)\ (y_3 - y_4) - (x_4 + x_5)\ (y_4 - y_5).$



Gambar 5

Setelah suku-suku yang bertanda minus diganti dengan suku-suku yang bertanda plus dan disusun, maka didapat:

2 luas 12345.1 $= (x_1 + x_2)\ (y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)\ (y_3 - y_2) + (x_3 + x_4)\ (y_4 - y_3) + (x_4 + x_5)\ (y_5 - y_4) + (x_5 + x_1)\ (y_1 - y_5).$

………………………………………………………………..(2a)

atau dengan rumus yang berbentuk umum:

$2L = \sum_{n = n\ 1,2\ldots} (X_n + X_{n+t})\ (Y_n - Y_{n+1})$

atau $2L = \sum_{n = n\ 1,2\ldots} (Y_{n+1} - Y_n)\ (X_n + X_{n+1})$…………………………………………….(2)

Bila dua rumus (1) dan (2) ditinjau maka pada rumus (1) yang didapat dengan memproyeksikan luas pada sumbu X, didapat sebagai factor pertama *selisih absis* dan sebagai factor kedua *jumlah ordinat.* Pada rumus (2) yang didapat dengan memproyeksikan luas pada sumbu Y, didapat *selisih ordinat* kali *jumlah absis.* Tetapi meskipun demikian didapat pada rumus (1) $x_n - x_{n+1}$ dan pada rumus (2) $y_{n+1} - y_n$, jadi tetap ada kemungkinan membuat kesalahan bila menggunakan dua rumus itu.

Sekarang rumus-rumus (1) dan (2) akan diuraikan, maka dari rumus (1) didapat:

$$2 \text{ luas} = (x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 – x_2y_2) + (x_2y_2 + x_2y_3 – x_3y_2 – x_3y_3) + (x_3y_3 + x_3y_4 – x_4y_3 – x_4y_4) + (x_4y_4 + x_4y_5 – x_5y_4 – x_5y_5) + (x_5y_5 + x_5y_1 – x_1y_5 – x_1y_1).$$

Bila dilihat dengan saksama, suku-suku yang didapat dengan perbanyakan x dan y yang mempunyai indeks sama, ialah: x_1y_1; x_2y_2; x_3y_3; x_4y_4 dan x_5y_5 akan hilang. Maka didapat:

$$2L = (x_1y_2 – x_2y_1) + (x_2y_3 – x_3y_2) + (x_3y_2 – x_4y_3) + (x_4y_5 – x_4y_5) + (x_5y_1 – x_1y_5)$$

atau dengan rumus-rumus yang mempunyai bentuk umum:

$$2L = \sum_{n = n\,1,2...} (X_{n+1} - X_{n+1} Y_n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dengan menguraikan rumus (2) didapat:

$$2 \text{ luas} = (x_1y_2 - x_1y_1 + x_2y_2 – x_2y_1) + (x_2y_3 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_3y_3 + x_4y_4 – x_4y_3) + (x_4y_5 - x_4y_4 + x_3y_5 – x_5y_4) + (x_5y_1 – x_5y_5 + x_1y_1 – x_1y_5)$$

$$= (x_1y_2 – x_2y_1) + (x_2y_3 – x_3y_2) + (x_3y_4 – x_4y_3) + (x_4y_5 – x_5y_4) + (x_5y_1 – x_1y_5).$$

atau dengan bentuk umum menjadi:

$$2L = \sum_{n = 1,2} (X_{n+1} - X_{n+1} Y_n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3b)$$

Maka ternyata bahwa rumus (3a) yang didapat dari rumus (1) dan rumus (3b) yang didapat dari rumus (2) mempunyai bentuk yang sama:

$$2L = \sum_{n = 1,2...} (X_n Y_{n+1} - X_{n+1} Y_n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Maka supaya tidak membuat kesalahan, ada baiknya bila akan menghafalkan supaya diambil rumus (3).

Untuk dengan mudah menggunakan rumus (3), baiklah titik-titik batas daerah ditulis dari atas ke bawah (*jangan lupa: titik I ditulis lagi du bawah)* dengan koordinat-koordinatnya.

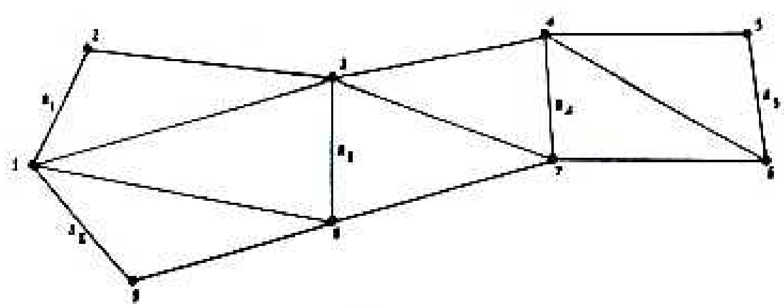
titik	x	y	$X_n Y_{n+1} - X_{n+1} Y_n$
1	+ 34,76	+ 15,81	
2	+ 10,34	+ 28,17	(+ 34,76) (+28,17) – (+10,34) (+15,81) = 815,7138
3	- 30,55	+ 14,28	(+ 10,34) (+14,28) – (-30,55) (+28,17) = 1008,2487

4	- 35,42	- 18,61	(- 30,55) (-18,61) – (-35,42) (+14,28) = 1074,3311
5	+ 24,94	- 20,77	(- 35,42) (-20,77) – (+24,94) (-18,61) = 1199,8068
1	+ 34,76	+ 15,81	(+ 4,94) (+15,81) – (+ 34,76) (-20,77) = 1116,2666
			2 luas = 5214,3690
			luas = 2607,1845 m2

3.3. PENENTUAN LUAS DENGAN CARA SETENGAH ORAFIS

Penentuan luas dengan cara setengah grafis berdasarkan atas prinsip sebagai berikut. Sebuah segitiga mempunyai alas yang pendek a dan tinggi yang panjang t. Maka luas segitiga L = 1/2 at. Misalkan sekarang pengukuran alas a diliputi oleh kasalahan da dan pengukuran tinggi t diliputi oleh kesalahan dt, maka L = 1/2 (a + da) (t + dt) = 1/2 at + 1/2 adt + 1/2 tda + 1/2 dadt dan karena suku terakhir adalah hasil dua kesalahan dad dan dt yang kecil dapat diabaikan, dapatlah ditulis L = 1/2 at + 1/2 (adt + tda), sehingga kesalahan pada luas dL = 1/2 (adt + tda). Untuk membuat kesalahan dL kecil, haruslah diusahakan supaya kesalahan yang diperbanyak dengan angka yang besar dibuat sekecil-kecilnya. Pada rumus dapat dilihat bahwa suku itu adalah tda karena t besar, sehingga kesalahan da pada pengukuran alas yang pendek harus dibuat sekecil-kecilnya.

Cara ini dapat digunakan untuk mencari luas suatu daerah yang berbentuk sedemikian rupa, hingga daerah itu dapat dibagi dalam beberapa segitiga yang mempunyai alas yang pendek dan tinggi yang panjang.



Gambar 6

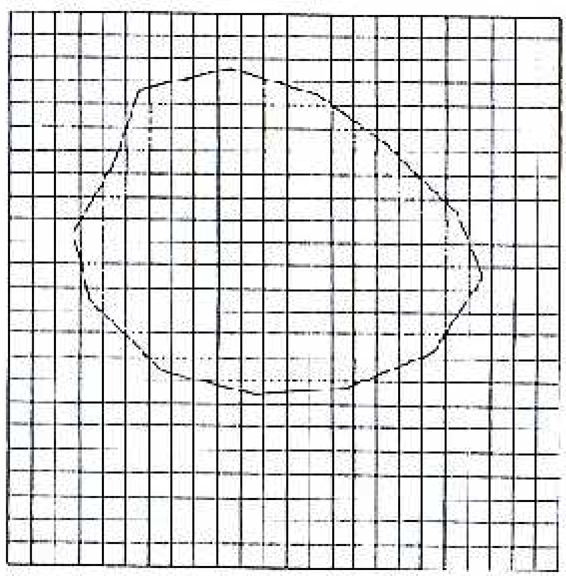
Misalkan daerah itu berbentuk seperti pada gambar *X.3* dan dibatasi oleh titik-titik 1, 2, s/d 9. Maka diukurlah dengan teliti jarak-jarak 12, 19, 38, 47 dan 56 yang akan dijadikan alas-alas segitiga-segitiga. Pengukuran dilakukan misalnya dengan membuat poligoon 1-2-3-4-5-6-7-8-9-1 untuk dapat menggambar daerah itu. Diukurlah sekarang tinggi semua segitiga pada gambar. Dengan demikian dari semua segitiga diketahui alas dan tingginya sehingga luas tiap-tiap segitiga dapat dihitung dan dengan demikian didapat luas seluruh daerah.

3.4. PENENTUAN LUAS DENGAN CARA GRAFIS

Cara grafis akan digunakan untuk menentukan luas suatu daerah, bila penentuan luas tidak dapat dilakukan dengan menggunakan jarak-jarak yang diukur atau dengan menggunakan koordinat-koordinat seperti pada pengukuran daerah dengan B.T.M. atau planchet. Maka untuk pengukuran luas dengan cara grafis ada beberapa cara yang semuanya akan menggunakan alat pengukur luas (= planimeter) yang dibuat dari gelas, pada gelas mana digores garis-garis yang merupakan skala tertentu.

a. *Gelas yang berkotak-kotak dengan ukuran tertentu.* Untuk menentukan luas suatu daerah yang dibatasi oleh garis-garis terpotong-potong yang pendek, maka digunakan gelas berkotak-kotak. Bidang gelas dengan garis-garis diarahkan ke bawah dan diletakkan di atas gambar daerah yang akan diukur luasnya (*gambar X – 4a).* Maka dapatlah dengan segera dijumlah kotak yang letak di dalam daerah itu, seperti dapat dilihat pada gambar antara luas yang dinyatakan oleh garis-garis yang ditarik terpotong-potong. Sisa luas yang letak antara garis-garis ini dan garis batas daerah dapat ditentukan dengan membagi sisa luas ini dalam segitiga dan trapezium yang luasnya dapat dihitung dengan menentukan alas dan tinggi untuk segitiga dan dengan menentukan dua sisi yang sejajar dan jarak antara dua sisi ini untuk trapezium. Semua besaran ini dapat langsung diukur dengan menggunakan kotak-kotak itu.

Garis-garis terpotong-potong yang ditarik untuk menentukan jumlah kotak-kotak dapat dibuat di luar daerah, sehingga nanti luas daerah didapat dengan jumlah kotak-kotak ini dikurangi dengan luas daerah antara garis batas daerah dengan garis-garis terpotong-potong, luas mana ditentukan dengan cara yang sama untuk menentukan sisa luas di atas



.

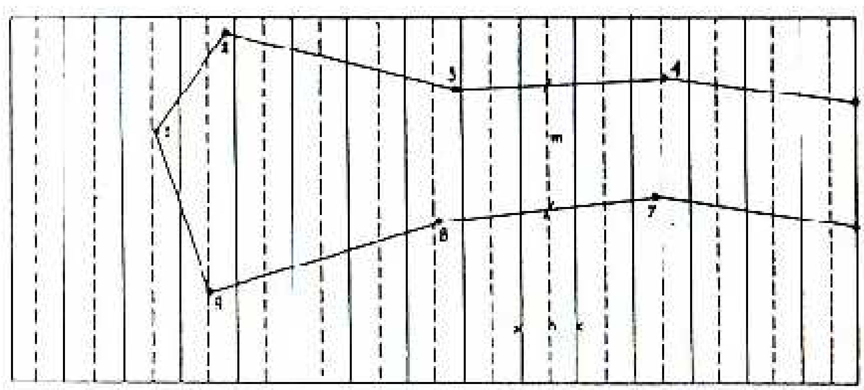
Gambar 7

b. Gelas dengan garis-garis yang sejajar. Bila daerah itu berbentuk memanjang seperti pada *gambar X – 3* maka dapat digunakan suatu gelas yang digores dengan garis-garis sejajar, dan garis-garis tersebut digores penuh dan terpotong-potong berganti-ganti. Daerah yang akan ditentukan luasnya diletakkan sedemikian rupa, hingga suatu garis batas yang pendek diimpitkan dengan salah satu garis yang ditarik penuh di atas gelas (lihat *gambar X – 4b*). Maka dapatlah dilihat, bahwa daerah dibagi oleh garis-garis yang sejajar itu dalam beberapa trapesia. Tinggi trapesia itu sama dengan jarak antara dua garis yang ditarik penuh, sedang setengah jumlah sisi yang sejajar sama dengan panjang garis yang ditarik terpotong-potong di dalam trapezium itu. Panjang garis ini dapat diukur dengan mengambil garis ini antara dua kaki jangka tusuk dan diukur pada mistar.

Bila jarak antara dua garis yang ditarik penuh ada h dan garis tengah trapezium yang letak di atas garis terpotong-potong ada m, maka luas daerah:

$L = hm_1 + hm_2 + hm_3 \ldots\ldots\ldots hm_n = h\Sigma m.$

Yang harus dilakukan untuk mendapat luas ialah tidak lain menjumlah garis-garis tengah trapezium dan memperbanyak jumlah ini dengan h. Menjumlah garis tengah m dapat dilakukan dengan mengukurnya satu per satu dan menentukan jumlahnya atau garis-garis tengah m ini dibuat di suatu garis lurus dan diukur jarak antara titik awal dan titik akhir dengan mistar.

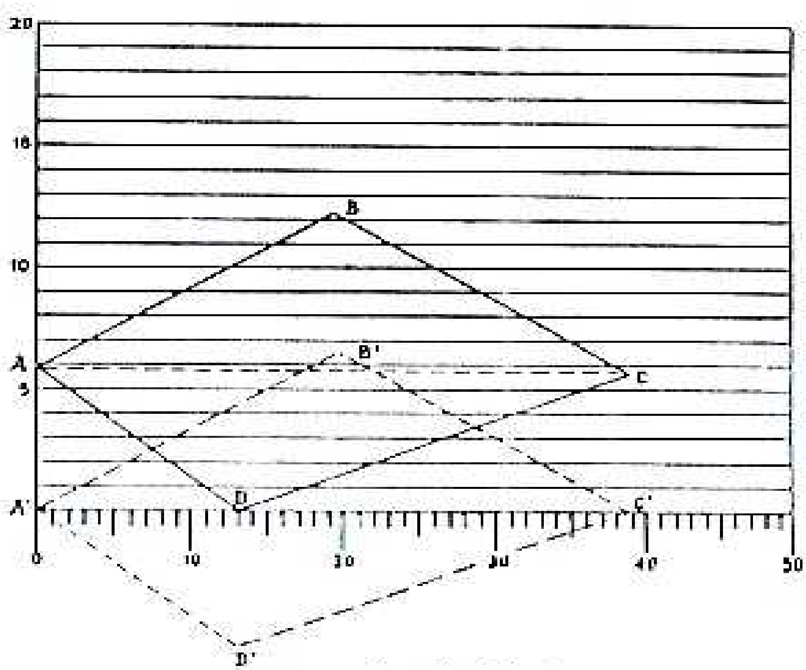


Gambar 8

c. Gelas yang di bawah diberi skala dan diberi garis-garis yang sejajar, Bila daerah berbentuk sederhana, misalnya sebagai segiempat, maka dapat digunakan suatu planimeter gelas seperti dapat dilihat pada *gambar X – 4c.* Di bawah dibuat suatu skala dalam mm dan di atas skala ini dibuat garis-garis sejajar.

Misalkan akan ditentukan luas segiempat ABCD. Luas segiempat ABCD dapat diambil sebagai jumlah luas dua segitiga: ACD dan ACB, yang mempunyai alas AC sekutu. Maka alas AC ini dapat ditentukan dengan meletakkan A di titik 0 skala dan garis AC diimpitkan pada garis sejajar yang paling bawah. Pada skala yang letak di bawah, dapat dengan mudah ditentukan panjang AC. Geserkan sekarang planimeter gelas sedemikian rupa di atas gambar dengan luas ABCD, sehingga titik D letak di garis sejajar yang paling bawah dan AC sejajar dengan garis-garis sejajar. Maka jarak titik B ke garis sejajar yang paling bawah akan sama dengan jumlah tinggi dua segitiga ACB dan ACD: $h = h_1 + h_2$. Dengan demikian luas ABCD = 1/2 AC ($h_1 + h_2$) = 1/2 ACh. Untuk memudahkan penentuan luas, maka garis-garis mendatar tidak diberi angka yang sama degan jarak garis-garis itu dan garis sejajar paling bawah, tetapi diberi angka yang menyatakan setengah jarak itu. Jadi bila jarak suatu garis sejajar dengan garis sejajar paling bawah ada 10 mm, maka garis sejajar itu diberi angka 1/2 x 10 = 5.

Pada gambar jarak titik B ke garis sejajar paling bawah ada 12,3; yang sebenarnya 2 x 12,3 mm. Karena AC = 39,0 mm, maka luas ABCD = 39,0 x 12,3 mm^2 = 479,7 mm^2 dan dengan mengingat skala gambar ABCD dapatlah dengan mudah ditentukan luas ABCD yang sebenarnya pada permukaan bumi.



Gambar 9

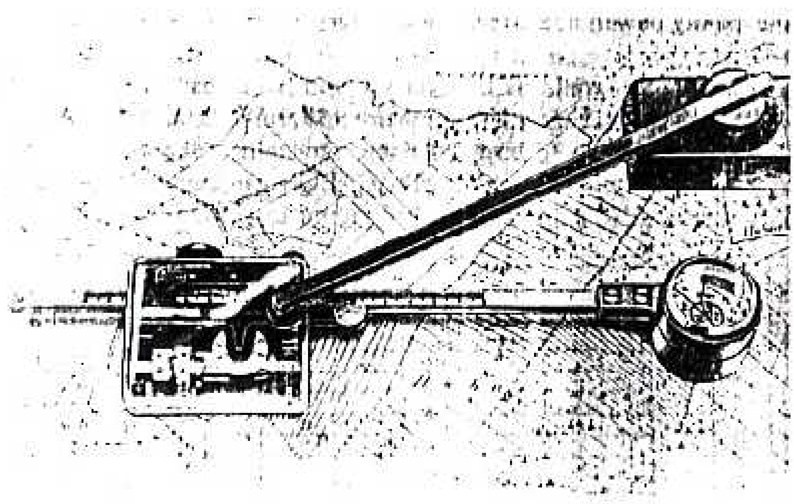
3.5. PENENTUAN LUAS DENGAN CARA MEKANIS-GRAFIS

a. Untuk menentukan luas dengan cara mekanis-grafis digunakan suatu alat yang dinamakan *planimeter.* Menurut konstruksi dan bentuk, planimeter dapat dibagi dalam dua bagian utama:

- planimeter kutub;
- planimeter roda.

Karena roda ukur merupakan bagian yang penting, maka diusahakan supaya roda ukur ini tidak mudah menjadi rusak, dengan menempatkan roda ukur di atas suatu piringan yang halus dan roda ukur bergerak di atas bidang yang halus ini. Maka karena diperlengkapi dengan piringan ini ada planimeter kutub dengan piringan dan planimeter roda dengan piringan.

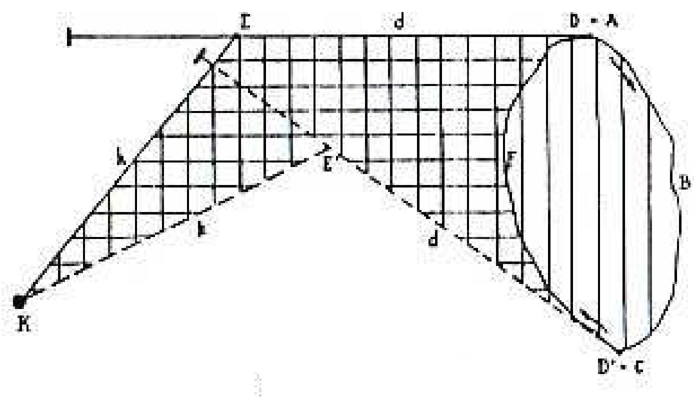
Umumnya yang digunakan adalah planimeter kutub. Maka di sini akan dibicarakan lebih lanjut planimeter kutub.



Gambar 10

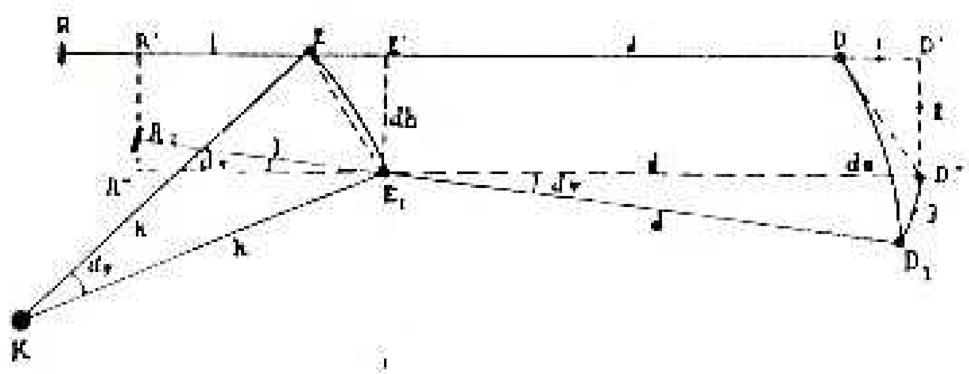
b. Planimeter kutub terdiri atas batang d yang pada satu ujung diperlengkapi dengan jarum D, sedang pada ujung lainnya ditempatkan suatu roda berskala yang selanjutnya akan dinamakan roda ukur. Skala roda ukur ini dapat dibaca lagi dengan nonius, sedang pemutaran penuh roda dapat dibaca lagi pada piringan berskala tersebut. Barang k yang dinamakan batang kutub di satu ujungnya diberi silinder K yang berat, dan yang dinamakan *kutub* planimeter; sedang ujung lainnya diperlengkapi dengan suatu pen yang dapat masuk ke suatu lobang E pada batang d, sehingga hubungan antara batang d dan batang k di titik E bekerja sebagai engsel.

Pada waktu digunakan jarum D digerakkan melintasi garis batas daerah yang akan diukur luasnya. Batang d bergerak dengan bebasnya dan menyeret karena engsel E, batang k yang turut bergerak tidak bebas karena tertahan oleh kutub K yang berat itu. Pada gerakan batang d roda ukur R akan berputar dan pemutaran roda ukur R ini dapat digunakan untuk menentukan luas yang garis batasnya dilintasi oleh jarum D. Maka perlulah dibuktikan lebih dahulu, bahwa luas akan sebanding dengan pemutaran roda, keadaan mana menjadi prinsip daripada semua macam alat pengukur luas planimeter.



Gambar 11

c. Misalkan akan diukur suatu luas ABCFA. Maka jarum D digerakkan melintasi garis batas ABCFA. Pada waktu jarum D digerakkan dari A ke C melalui B, batang d dan batang k membuat luas KEABCE’K. Pada waktu jarum D berjalan dari C kembali melalui F, maka dua batang d dan k membuat luas KE’CFDEK. Dan karena gerakan jarum dari C melalui F ke A mempunyai arah yang berlawanan dengan jalannya jarum dari A melalui B ke C, maka luas yang dibuat oleh batang d dan batang k sama dengan KEABCE’K – KE’CFDEK – luas ABCFA yang harus diukur.



Gambar 12

d. Sekarang akan dibuktikan, bahwa luas yang dibuat oleh dua batang d dan k sebanding dengan pemutaran roda ukur R. Misalkan sekarang pada gambar X. 5c. jarak dari engsel E ke jarum D ada d, jarak dari engsel E ke roda ukur R ada *l* dan jarak dari engsel E ke titik kutub K ada k. Keadaan awal planimeter adalah sebagai E-E-D dan KE. Gerakkan jarum D melintasi garis batas suatu luas dengan jarak elementair ds = DD_1. Maka setelah jarum ada di titik D_1 keadaan planimeter adalah R_1-E_1-D_1- dan KE_1. Luas yang dibuat oleh batang k dan batang d adalah $KEDD_1E_1K$, sehingga batang *l* dan d bergerak dari RED ke $R_1E_1D_1$.

Bila dilihat pada gambar X.5c., luas yang dibuat oleh batang d adalah EDD_1E_1E dan luas yang dibuat oleh batang k adalah KEE_1K. Misalkan sudut $EKE_1 = d\Phi$, maka luas yang dibuat oleh batang k ada $1/2\ k^2 d\Phi$.

Gerakan batang d dari keadaan ED ke keadaan E_1D_1 dapat diuraikan menjadi gerakan 1: ED → E'D' gerakan 2: E'D' → E_1D'' dan gerakan 3: E_1D'' → E_1D_1.

gerakan	***luas yang dibuat oleh batang d***	***Luas yang dibuat oleh batang k***	***Jarak lineair yang ditempuh oleh roda ukur karena pemutarannya***
→	0	-	0, karena roda bergerak kea rah sumbu roda.
↓			
2	d.dh	-	↓ R' R" = dh
3 ← d φ	÷ d^2 d φ	-	↑ - R" R_1 = - *l* d φ
		$1/2\ k^2 d\psi$	

Luas elementair yang dibuat oleh kedua batang k dan d menjadi

$dL = d.\ dh + 1/2\ d^2 d\varphi + 1/2\ k^2 d\psi$,

sedang jarak lineair yang ditempuh oleh roda ukur karena pemutaran roda ukur ada:

$dp = dh - l\ d\varphi$,

sehingga

$dh = dp + l\ d\varphi$, maka luas lementair menjadi:

$dL = d\ (dp + l d\varphi) + 1/2\ d^2 d\varphi + 1/2\ k^2 d\psi$.

atau

$dL = d.dp + d.l.\varphi + 1/2\ d^2 d\varphi + 1/2\ k^2 d\psi$……………………………………….(1)

dan

$L = d.dp + d.l \int d\varphi + 1/2\ d^2 \int d\varphi + 1/2\ k^2 d\psi$…………………………………….(2)

Pada waktu melakukan pengukuran didapat dua kemungkinan:

Kemungkinan kesatu: Titik kutub K letak di luar luas yang akan diukur. Karena barang k dan batang d kembali lagi ke keadaan semula dengan dua arah yang berlawanan, maka $\int d\varphi = 0$ dan $\int d\varphi = 0$.

Rumus (2) menjadi:

$L = d.p.$

Besaran p adalah jarak lineair yang ditempuh oleh roda karena pemutarannya. Bila sekarang jari-jari roda ukur ada r, maka dengan satu kali putaran jarak p yang ditempuh oleh roda ukur ada 2 π r.

Bila berputarnya roda ukur dinyatakan oleh U pemutaran penuh, maka p = 2πr.U, sehingga luas:

L = 2πr d.U. =A.U.

Dengan demikian telah dibuktikan bahwa luas yang diukur sebanding dengan pemutaran roda ukur U.

Kemungkinan kedua: Titik kutub K letak *di dalam luas* yang akan ditentukan. Batang k dan batang d kembali lagi ke keadaan semula, tetapi dengan pemutaran ke satu arah, sehingga $\int d\varphi = d\pi$ dan $\int d\psi = d\pi$.

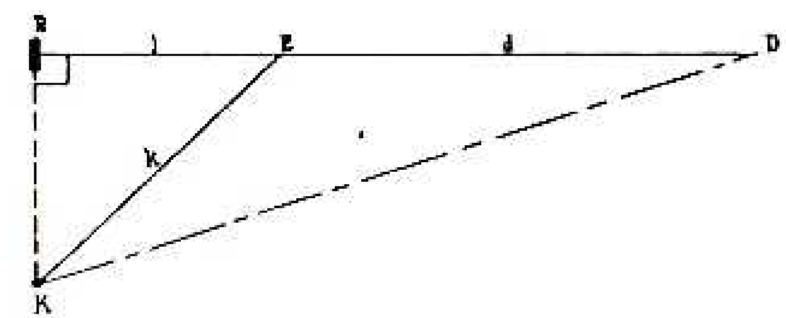
Rumus untuk luas menjadi:

$L = dp + d.l.2\pi + 1/2\, d^2.2\pi + 1/2\, k^2.2\pi.$

$= 2\pi rp.\, U + \pi\,(2d.l + d^2 + k^2).$

Karena π, d, *l,* k besaran-besaran yang tetap, suku kedua dalam ruas kanan menjadi tetap pula, sehingga rumus luas yang didapat dari hasil pengukuran dengan titik kutub K di dalam luas menjadi:

L = A.U + B.



Gambar 13

Besaran B dapat ditentukan sebagai berikut.

Tempatkan titik kutub K di bidang roda ukur, sehingga RK tegak lurus RD.

Maka di dalam segitiga KER adalah:

RK2 = k2 – l^2.

Di dalam segitiga RKD adalah:

$$\begin{aligned} KD &= \overline{RK}^2 + \overline{RD}^2 \\ &= (k^2 - l^1) + (1 + d)^2 \\ &= k^2 - l^2 + l^2 + 2al + d^2 \\ &= 2dl + d^2 + k^2 \end{aligned}$$

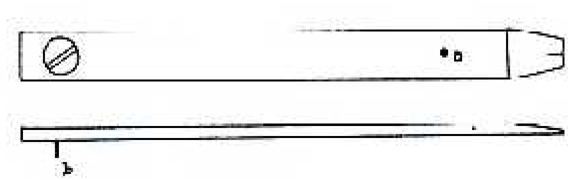
Maka B = Π KD^2 atau dengan perkataan : bilangan B sama dengan luas lingkaran dengan jari – jari KD yang didapat dengan menempat titik D di garis yang melalui titik R dan tegak lurus pada RD

e. Penentuan banyaknya pemutaran roda ukur ditentukan sebgai berikut: Pemutaran penuh roda ukur dapat dibaca pada piringan hitungan H. roda ukur di bagi dalam 100 bagian, sedang skala pada roda ukur dapat dibaca dengan nonius yang mempunyai satuan

nonius sama dengan sepersepuluh-nya satu bagian skala roda ukur. Maka keadaan roda ukur ditentukan dengan empat angka:

Angka pertama yang ditunjuk oleh suatu indeks pada piringan hitung, dua angka berikutnya adalah nomor garis skala roda ukur yang telak di muka garis sindeks nonius dan angka keempat adalah nomor garis nonius yang berimpit dengan garis skala roda ukur.

Keempat angka ini yang menyatakn keada roda ukur dalam satuan nonius dinama *pembacaan roda ukur planimeter.* Pemutaran roda ukur menjadi selisih dua pembacaan roda ukur sesudah dan sebelum jarum palnimeter digerakkan melintasi garis batas luas yang akan ditentukan.



Gambar 14

f. Untuk dapat menentukan luas dengan suatu planimeter, harus ditetapakan lebih dahulu berapa m^2 yang dinyatakan oleh satu satuan nonius pada panjang di antara engsel E dan jarum D yang tertentu. Dengan planimeter dibuat suatu luas yang diketahui besarnya. Misalkan luas ini ada L. m^2 dan keadaan roda ukur sebelum dan sesudah luas tersebut di buat ada v dan w_1 maka pemuratan roda ada (w – v) satuan nonius yang menyatakan L. m^2. maka satu satuan nonius menyatakan L : (w – v) m^2.

Luas L dapat dibuat dengan mistar percobaan yang mempunyai jarum b dan yang merupakan titik pusat suatu lingkaran. Jarum D planimeter di letakkan di dalam lobang a pada mistar percobaan dan dengan demikian dapatlah dibuat suatu lingkaran dengan jari-jari yang tetap. Untuk menentukan titik permulaan lingkaran digunakan garis c yang ada pada ujung kanan mistar percobaan.

Di bawah ini diberikan contoh:

Suatu lingkaran yang didapat dari mistar ukur dibuat sepuluh kali dengan memutar ke kanan dan memutar ke kiri. Jari-jari lingkaran ada 64.000.

Dengan memutar ke kanan keadaan roda sebelum dan sesudah diputar ada 9674 dan 22540; pemutaran roda menjadi = 12866

Dengan memutar ke kiri keadaan roda sebelum dan sesudah diputar ada 22540 dan 9679; pemutaran roda menjadi= 12861.

Maka pemutaran roda ada (12866 + 12861): 2 = 12864. luas yang dibuat ada 10 x a x 64,00 mm^2 = 128679.

Satu satuan nonius menyatakan 12869 : 12864 = 10,003 mm^2. untuk skala gambar 1 : 1000, satu satuan nonius menyatakan luas 10.003 m^2 karena pada skala 1 : 1000, 1 mm gambar = 1 m dan 1 mm^2gambar = 1 m^2 sebenarnya.

Untuk peta dengan skala 1 : 200 berarti 1 mm = 0,2 dan 1 mm^2 = 0,04 m^2 . Maka satu satuan nonius untuk skala 1 : 200 menjadi 10,003 x 0,04 m^2 = 0,40012 m^2.

3. 6. KETELITIAN PENGUKURAN LUAS

kesalahan maksimum pada pengukuran luas dengan menggunakan angka – angka (jarak-jarak) yang diukur pada lapangan adalah sebagai berikut :

untuk lapangan yang mudah : $f_1 = 0{,}20 \sqrt{L} + 0{,}00030\ L$

untuk lapangan yang sedang : $f_2 = 0{,}25 \sqrt{L} + 0{,}00045\ L$

untuk lapangan yang mudah : $f_1 = 0{,}20 \sqrt{L} + 0{,}00060\ L$

keselahan maksimur dengan cara grafis berlaku rumus:

$f_4 = 0{,}0004\ s \sqrt{L} + 0{,}00030\ L$

dalam rumus mana S adalah skala peta 1 : S. (*lihat tabel pada hlm.368).*

tabel di bawah ini dihitung dengan rumus – rumus di atas:

L dalam Ha	f_1m	F_2m	F_3 m	F_4 1: 500	f_4 1 : 1000	f_4 1 : 2500
0,01	2	2	3	2	4	10
0,05	4	6	7	4	9	22
0,20	10	12	1	10	1	45
1,00	23	30	36	23	43	103
10,00	93	124	155	93	156	346